Г-предел q-деформированного бета-ансамбля

Бакауов Филипп,Кафедра физики частиц и космологии,МГУ

04.06.20

Г-предел
Общая идея перехода

Продемонстрируем переход к нетривиальному 4d/2d пределу из 5d/3d случая,считая 5-ое измерение выраженным через S_1,с радиусом h,который собственно мы и устремили к 0.Величины в 5d теории выражаются тогда через величины 4d теории следующим образом [4] (2.55):

$$(\ldots)_{5d/3d} = e^{-h(\ldots)_{4d/2d}}$$

При стремлении q к единице,а h к нулю мы и получаем 4d предел 5d теории.Параметры,которые будут видоизменяться это $q = e^{h}$,$t = e^{h\beta}$.

Нам часто будет встречаться т.н. q-символы Похгаммера:$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)$.В частности $(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k)$.
Вводя функцию $\Gamma_q(x) = (1-q)^{1-x}\frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}$,можно показать, что:$\Gamma_q(x) = \Gamma(x)$ в пределе $q \to 1$.

Это приводит к используемому нами в дальнейшем соотношению:

$$\lim_{q\to 1}\frac{(q^x;q)_\infty}{(q;q)_\infty} = (-\hbar)^{1-x}\frac{1}{\Gamma(x)}.$$

По определению,интегрирование в q-анализе выполняется следующим образом:

$$\int\limits_0^a f(x)d_qx = (1-q)a\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j a)$$

Это определение видоизменяется при переходе к h-анализу ,учитывая связь $q = e^h$:

$$\int\limits_a^b f(x)d_hx = \begin{cases} \mathrm{h}\big(f(a) + f(a+h) + \cdots + f(b-h)\big), & a < b \\ 0, & a = b \\ \text{-h}\big(f(b) + f(b+h) + \cdots + f(a-h)\big), & a > b \end{cases}$$

Можно показать,что:

- $\int\limits_0^1 d_q x f(x) = (1-q)\sum\limits_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j) = (-h)\sum\limits_{j=0}^{\infty} e^{hj} f(e^{hj}) =$
  $(-h)\sum\limits_{j=0}^{\infty}(1+hj)f(1+hj) = \int\limits_1^{\infty} d_h x(xf(x)).$
- $\int\limits_0^1 d_q x \frac{1}{x}(q^{x\partial_x}-1)f(x) = \left. hf(x)\right|_{x=1} = \left. f(w)\right|_{w=0} = 0$

Преобразования меры q-Сельберга
Преобразования интегралов

Вид среднего по мере q-интеграла Сельберга:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{\int d_q^N x \prod_{k=1}^{N} \left(x_k^u \prod_{a=0}^{\nu-1} (q^a x_k - 1) \right) \Delta^{(q,t)} f(x)}{\int d_q^N x \prod_{k=1}^{N} \left(x_k^u \prod_{a=0}^{\nu-1} (q^a x_k - 1) \right) \Delta^{(q,t)}}$$

- $$\prod_{k=0}^{\nu-1}(q^k x_i - 1) = (-1)^\nu \prod_{k=0}^{\nu-1}(1 - q^k x_i) = (-1)^\nu (x_i;q)_\nu =$$
$$(-1)^\nu \frac{(x_i;q)_\infty}{(x_i q^\nu;q)_\infty} = (-1)^\nu \frac{\frac{(x_i;q)_\infty}{(q;q)_\infty}}{\frac{(x_i q^\nu;q)_\infty}{(q;q)_\infty}} = (-1)^\nu \frac{\frac{(q^{w_i};q)_\infty}{(q;q)_\infty}}{\frac{(q^{w_i+\nu};q)_\infty}{(q;q)_\infty}} \longrightarrow$$
$$(-1)^\nu (-\hbar)^{1-w_i} \frac{1}{\Gamma(w_i)} (-\hbar)^{w_i+\nu-1} \frac{1}{\Gamma(w_i+\nu)} = (\hbar)^\nu \frac{\Gamma(w_i+\nu)}{\Gamma(w_i)}.$$

- $$\Delta^{(q,t)}(x) = \prod_{k=0}^{\beta-1}\prod_{i\neq j}(x_i - q^k x_j) = \prod_{i\neq j} x_i^\beta \prod_{k=0}^{\beta-1}(1 - q^k \tfrac{x_j}{x_i}) = \prod_{i\neq j} x_i^\beta (\tfrac{x_j}{x_i};q)_\beta =$$
$$\prod_{i\neq j} x_i^\beta \frac{(\frac{x_j}{x_i};q)_\infty}{(q^\beta \frac{x_j}{x_i};q)_\infty} = \prod_{i\neq j} x_i^\beta \frac{(q^{w_j-w_i};q)_\infty}{(q^{\beta+w_j-w_i};q)_\infty} = \prod_{i\neq j} x_i^\beta \frac{\frac{(q^{w_j-w_i};q)_\infty}{(q;q)_\infty}}{\frac{(q^{\beta+w_j-w_i};q)_\infty}{(q;q)_\infty}} \longrightarrow$$
$$\prod_{i\neq j} x_i^\beta (-\hbar)^{1+w_i-w_j} \frac{1}{\Gamma(w_j-w_i)} (-\hbar)^{-1-w_i+w_j+\beta} \Gamma(\beta + w_j - w_i) =$$
$$(-\hbar)^\beta \prod_{i\neq j} x_i^\beta \frac{\Gamma(\beta+w_j-w_i)}{\Gamma(w_j-w_i)} = (-\hbar)^\beta \prod_{i=1}^{N} x_i^{(N-1)\beta} \prod_{i\neq j} \frac{\Gamma(\beta+w_j-w_i)}{\Gamma(w_j-w_i)}.$$

Преобразования меры q-Сельберга
Две возможности параметра u

Со степенями x_i^u есть 2 варианта:

1. $u \sim 1$ при $q \to 1$

   Тогда

   $$x_i \longrightarrow 1 + hw_i, \prod_{i=1}^{N} x_i \longrightarrow 1 + h\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = 1 + hp_1, \prod_{i=1}^{N} x_i^u \longrightarrow 1 + hup_1.$$

2. $u = \frac{a}{\hbar}$ при $q \to 1$

   $$(1 + \hbar w_i)^{\frac{a}{\hbar}} = (1 + \frac{aw_i}{\frac{1}{\hbar}})^{\frac{a}{\hbar}} = e^{aw_i}.$$

   Соответственно: $\prod_{i=1}^{N} x_i^u \longrightarrow \prod_{i=1}^{N} e^{aw_i}.$

Преобразования меры q-Сельберга
Преобразованная мера

- $$\langle f(x)\rangle = \int_0^\infty d^N w \prod_{i=1}^N x_i \prod_{i=1}^N e^{aw_i}\frac{\Gamma(w_i+\nu)}{\Gamma(w_i)} \prod_{i=1}^N x_i^{(N-1)\beta} \prod_{i\neq j} \frac{\Gamma(\beta+w_j-w_i)}{\Gamma(w_j-w_i)} f(w) = \int_0^\infty d^N w(1+h((N-1)\beta+1)p_1) \prod_{i=1}^N e^{aw_i}\frac{\Gamma(w_i+\nu)}{\Gamma(w_i)} \prod_{i\neq j} \frac{\Gamma(\beta+w_j-w_i)}{\Gamma(w_j-w_i)} f(w).$$
- $$\langle f(x)\rangle = \int_0^\infty d^N w \prod_{i=1}^N x_i(1+hup_1)\frac{\Gamma(w_i+\nu)}{\Gamma(w_i)} \prod_{i=1}^N x_i^{(N-1)\beta} \prod_{i\neq j} \frac{\Gamma(\beta+w_j-w_i)}{\Gamma(w_j-w_i)} f(w) = \int_0^\infty d^N w(1+h(u+1+\beta(N-1))p_1)\frac{\Gamma(w_i+\nu)}{\Gamma(w_i)} \prod_{i\neq j} \frac{\Gamma(\beta+w_j-w_i)}{\Gamma(w_j-w_i)} f(w).$$

В дальнейшем будем рассматривать только 1-ый случай,2-ой случай рассматривается аналогично.

Исходная формула для q-случая выглядит следующим образом:

$$\int d_q^N x \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{x_i}(q^{x_i \partial_{x_i}} - 1)x_i \left[\tfrac{x_i - q}{z - x_i} \prod_{i \neq j} \tfrac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \prod_{k=1}^{N} \left(x_k^u \prod_{a=0}^{v-1} (q^a x_k - 1) \right) \Delta^{(q,t)}(x) f(x) \right] = 0.$$

Петлевые уравнения
Пример действия e^{∂_w}

Действие оператора на множители,входящие в формулу:

$$e^{\partial_{w_m}}\Delta^{(\Gamma)}(w)=\prod_{m\neq j}\frac{(\beta+w_m-w_j)(w_j-w_m-1)}{(w_m-w_j)(\beta+w_j-w_m-1)}\Delta^{(\Gamma)}(w)$$

,

$$e^{\partial_{w_m}}\prod_{m\neq n}\frac{w_m-w_n-\beta}{w_m-w_n}=\prod_{m\neq n}\frac{w_m-w_n-\beta+1}{w_m-w_n+1}$$

,

$$e^{\partial_{w_m}}\prod_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)}=\prod_{k=1,k\neq m}^{N}\frac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)}\frac{\Gamma(w_m+\nu+1)}{\Gamma(w_m+1)}=\frac{w_m+\nu}{w_m}\prod_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(w_k+\nu)}{\Gamma(w_k)},$$

Таким образом,опуская меру интегрирования,получаем вид,аналогичный q-случаю :

$$\left\langle \sum_{m=1}^{N} \left[e^{a} \left(1 + h(1 + \beta(N-1))\right) \frac{w_m + \nu}{y - w_m - 1} f\left(w_{j \neq m}, w_m + 1\right) \prod_{m \neq n} \frac{\beta + w_m - w_n}{w_m - w_n} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{w_m - 1}{y - w_m} f(w) \prod_{m \neq n} \frac{w_m - w_n - \beta}{w_m - w_n} \right] \right\rangle = 0.$$

Петлевые уравнения
Контурный интеграл

$$\left\langle \oint\limits_{C_x} d\xi \left[e^{a} \left(1 + h(1 + \beta(N-1))\right) \frac{\xi+\nu}{y-\xi-1} e^{\partial_{w_m}} f(p_n) \prod_{j=1}^{N} \frac{\xi - w_j + \beta}{\xi - w_j} + \right.\right.$$

$$+ \frac{\xi-1}{y-\xi} f(p_n) \prod_{j=1}^{N} \frac{\xi - w_j - \beta}{\xi - w_j} = 0.$$

получаем итоговый вид петлевых уравнений:

$$\xi = y - 1 : \quad e^a(y + \nu - 1)\langle f(p_n + \sum_{l=0}^{n-1} y^l(-1)^{n-l+1} C_n^l) exp[-\sum_{n>0} \frac{1}{ny^n}(\sum_{l=0}^{n-1} p_l C_n^l((1-\beta)^{n-l} - 1))]\rangle +$$

$$\xi = y : +(y-1)\langle f(p_n) exp[-\sum_{n>0}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{ny^n} C_n^l p_l \beta^{n-l}]\rangle = 0.$$

Продемонстрируем:
$f(p_n) = 1.$

Разлагая экспоненту,получаем:

$$e^a(y+\nu-1)(1+\frac{1}{y}(N\beta)+\frac{1}{2y^2}(2\beta\langle p_1\rangle-N(\beta^2-2\beta)+N^2\beta^2)+\frac{1}{3y^3}(3\langle p_2\rangle\beta- N(\beta-2)(\beta+(\beta-1)^2)-3\langle p_1\rangle\beta(\beta-2)+\frac{1}{2}N^3\beta^3+\frac{3}{2}N\beta(2\beta\langle p_1\rangle- N\beta(\beta-2))))+(y-1)(1-\frac{1}{y}(N\beta)+\frac{1}{2y^2}(N^2\beta^2-N\beta^2-2\beta\langle p_1\rangle)+ \frac{1}{3y^3}(-(N\beta^3+3\langle p_1\rangle\beta^2+3\langle p_2\rangle\beta)-\frac{1}{2}(N^3\beta^3)+\frac{3}{2}N\beta(N\beta^2+2\beta\langle p_1\rangle)))) = 0.$$

Получаем следующие ответы:

$$\langle p_1 \rangle = -\frac{N(N\beta - \beta - \beta e^a + 2\nu e^a + N\beta e^a + 2)}{(2(e^a - 1))}$$

$$\langle p_2 \rangle = \frac{N}{6(e^a-1)^2}(6e^a - 6\beta + 6N\beta + b^2 e^{2a} + 6\nu^2 e^{2a} - 3N\beta^2 - 18\beta e^a + 18\nu e^a + \beta^2 + 2N^2\beta^2 + 10\beta^2 e^a - 18N\beta^2 e^a - 6\beta\nu e^{2a} - 3N\beta^2 e^{2a} + 8N^2\beta^2 e^a + 18N\beta e^a + 2N^2\beta^2 e^{2a} - 12\beta\nu e^a + 12N\beta\nu e^a + 6N\beta\nu e^{2a} + 6)$$

$$\langle p_1^2 \rangle = \frac{N}{4(e^a-1)^2}(4N + 4e^a - 4N\beta + N\beta^2 + 4N^2\beta - 4\beta e^a + 4\nu e^a - 2N^2\beta^2 + N^3\beta^2 + 2N\beta^2 e^a + 4N^2\beta e^a + N\beta^2 e^{2a} - 4N^2\beta^2 e^a + 2N^3\beta^2 e^a + 4N\nu^2 e^{2a} + 8N\nu e^a - 2N^2\beta^2 e^{2a} + N^3\beta^2 e^{2a} + 4N^2\beta\nu e^{2a} - 4N\beta\nu e^a - 4N\beta\nu e^{2a} + 4N^2\beta^2\nu e^a)$$

Петлевые уравнения
Несколько любопытных моментов

1. В случае,когда $u \sim 1$,который можно назвать u-случаем,величины для полиномиальных средних будут иметь вид,пропорциональный $\frac{1}{h}$,что является необычным и не совсем пока понятным результатом.Вычисления с помощью взятия ряда также дают расходящийся ответ.
2. Интересно то,что для взятия среднего по определению для получения правильного ответа нужно сначала посчитать ряд,а лишь потом устремить h к нулю.Если же сначала устремить h к нулю,а затем взять уже интеграл,то ответ будет другим.
3. Может возникнуть определённое сомнение в том,что петлевые уравнения вообще необходимы,так как любое среднее можно посчитать по определению,однако даже подсчёт полиномов 2-ого порядка путём подсчёта ряда(то есть по определению) с помощью компьютерного символьного вычисления не дало результатов,так как заняло очень много времени,при этом не закончив подсчёт.

Предел полиномов Макдональда
Идея проверки

Рассмотрим полиномы Макдональда.Их средние выражаются через параметры $q = e^h, t = e^{h\beta}, u = \frac{a}{h},$ а параметры ν, N остаются неизменными.Попробуем разложить средние от полиномов по h,а затем сравнить полученные выражения с полученными путём перевыражения симметрических полиномов в переменных x через переменные в переменных w,а также не забыть о поправках к мере h-усреднения,которые.как мы увидим,также играет роль. В переменных w: $p_1(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N}(e^{hw_i}) =$(до 1-ого порядка по h)$= \sum_{i=1}^{N}(1 + hw_i) = N + hp_1(w)$. Среднее для $M_{[1],[]}$:

$$\langle M_{[1],[]}\rangle = \langle p_1(x)\rangle = \frac{q(t^N-1)(t^{N-1}q^{u+1}-1)}{(t-1)(t^{2N-2}q^{u+\nu+2}-1)}.$$

Попробуем сделать то же для 2-ого уровня.Возьмём наиболее простой из полиномов Макдональда – $M_{[1,1][]} = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2)$.Аналогичным образом разложим $p_2(x), p_1^2(x)$ по w:

$$p_2(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} e^{2hw_i} = \sum_{i=1}^{N} (1 + 2hw_i + \tfrac{1}{2}(2hw_i)^2) =$$
$$N + 2hp_1(w) + 2h^2 p_2(w),$$

$$p_1^2(x) = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} 1 + hw_i + \frac{(hw_i)^2}{2}\right)^2 =$$
$$\left(N + hp_1(w) + \frac{h^2 p_2(w)}{2}\right)^2 = N^2 + 2Nhp_1(w) + h^2(p_1^2 + Np_2).$$

$$\langle M_{[1,1][]} \rangle = \frac{q^2 t(t^N-1)(e^a q t^{N-1}-1)(t^{N-1}-1)(e^a q t^{N-2}-1)}{(t^2-1)(e^a q^{v+2} t^{2N-2}-1)(t-1)(e^a q^{v+2} t^{2N-3}-1)}$$

Предел полиномов Макдональда
Поправки к мере

Попытаемся решить эту проблему,учитывая поправки к мере,по которой берётся усреднение.Разделим вклады в мере следующим образом:

$$\langle p_2(x)\rangle = \frac{\langle (N+2hp_1(w)+2h^2p_2(w))(1+hA+\frac{1}{2}h^2B)\rangle}{\langle (1+hA+\frac{1}{2}h^2B)\rangle}$$

Аналогично для $p_1^2(w)$. Раскладывая по h до 2-ого порядка находим,что:

$$\langle p_2(x)\rangle = (N + h(2\langle p_1(w)\rangle + N\langle A\rangle) + h^2(2\langle p_2(w)\rangle + \frac{N\langle B\rangle}{2} + 2\langle p_1(w)A\rangle))(1 - h\langle A\rangle + h^2(\langle A\rangle^2 - \frac{\langle B\rangle}{2})) =$$
$$N + 2hp_1(w) + h^2(2\langle p_2(w)\rangle + 2\langle p_1(w)A\rangle - 2\langle A\rangle\langle p_1(w)\rangle).$$

Предел полиномов Макдональда
Пример поправок

$$\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1}(q^k x_i - 1) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1}(1 + h(k+w_i) + \tfrac{h^2}{2}(k+w_i)^2 - 1) =$$
$$\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1} h(k+w_i)(1+\tfrac{h}{2}(k+w_i)) = \prod_{i=1}^{N} h^{\nu}\prod_{k=0}^{\nu-1}(k+w_i)\prod_{k=0}^{\nu-1}(1+\tfrac{h}{2}(k+w_i)) =$$
$$\prod_{i=1}^{N} h^{\nu}\prod_{k=0}^{\nu-1}(k+w_i)\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1}(1+\tfrac{h}{2}(k+w_i)) = I\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1}(1+\tfrac{h}{2}(k+w_i)) =$$
$$I\prod_{i=1}^{N}\prod_{k=0}^{\nu-1}(1+\tfrac{h}{2}w_i+\tfrac{h}{2}k) = I\prod_{i=1}^{N}(1+\tfrac{h}{2}\nu w_i+\tfrac{h}{2}\tfrac{\nu(\nu-1)}{2}) =$$
$I(1+\frac{h}{2}\nu p_1(w)+\frac{h}{2}N\frac{\nu(\nu-1)}{2})$,где I–мера без поправок.

Предел полиномов Макдональда
2-ой порядок 2-ой подход

Собирая всё вместе,получаем итоговое разложение $M_{[1,1][]}$ через полиномы от w:

$$\langle M_{[1,1][]}\rangle = \frac{1}{2}(\langle p_1^2(x)\rangle - \langle p_2(x)\rangle) = \frac{1}{2}(N(N-1) + 2h\langle p_1(w)\rangle(N-1) + h^2(\langle p_1^2(w)\rangle + (N-2)\langle p_2(w)\rangle + (N-1)(2(\beta(N-1)+1)+\nu)(\langle p_1^2(w)\rangle - (\langle p_1(w)\rangle)^2))).$$

Подставляя выражения для $\langle p_1(w)\rangle, \langle p_2(w)\rangle, \langle p_1^2(w)\rangle$ из уравнений получаем соответствие в 0-ом,1-ом и 2-ом порядках.

Собственные функции модели rRS
1-ый подход

Гамильтониан имеет вид: $H^{rR} = \sum_{i=1}^{N} \prod_{k\neq i} \frac{w_i - w_k + \beta}{w_i - w_k} e^{\partial_{w_i}}$

Выделим в гамильтониане операторы $\hat{O}_i = \prod_{k\neq i} \frac{w_i - w_k + \beta}{w_i - w_k} e^{\partial_{w_i}}$. Введём функции $\Gamma_i = \prod_{k\neq i} \frac{\Gamma(w_i - w_k)}{w_i - w_k + \beta}$. Попробуем сумму или произведение величин Γ_i в качестве собственной функции.

- $\sum_{i=1}^{N} \hat{O}_i \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j + \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j \left(\sum_{i\neq j} \left(\prod_{k\neq i} \frac{w_i - w_k + \beta}{w_i - w_k} \right) \frac{w_j - w_i + \beta - 1}{w_j - w_i - 1} \right)$
- $\sum_{i=1}^{N} \hat{O}_i \prod_{j=1}^{N} \Gamma_j = \left(\sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} \Gamma_j \right) \sum_{i=1}^{N} \prod_{j\neq i}^{N} \frac{(w_j - w_i + \beta - 1)}{(w_j - w_i - 1)}.$

Собственные функции модели rRS
Небольшая лемма и тривиальный класс

Лемма:

$$\sum_{i=1}^{N}\prod_{k\neq i}\frac{w_i-w_k+\alpha}{w_i-w_k}=N.$$

Таким образом,если для любого оператора $e^{\partial_{w_i}}$ функция будет собственной,то она будет собственной и для всего H^{rR}.Так как для любой i действие оператора должно быть одинаково,то функция симметрична.Из условия $f(w_i+1)=f(w_i)$ следует периодичность.Общий класс функций,как уже было сказано,являющихся собственными для H^{rR} это класс функций,являющихся собственными для любого из операторов $e^{\partial_{w_i}}$ с одинаковыми собственными значениями,явно выражаемым подклассом этого класса являются все симметрические периодические функции.

выражение для "нетривиальной"собственной функции в случае 2-ух переменных:
$\psi(w_1, w_2|z_1, z_2) =$
$z_2^{w_1+w_2}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{w_1}\frac{\Gamma(w_1-w_2)}{\Gamma(w_1-w_2+\beta)}{}_2F_1(\frac{\epsilon_+}{\epsilon_1}, \frac{\epsilon_++w_1-w_2}{\epsilon_1}; \frac{\epsilon_1+w_1-w_2}{\epsilon_1}|\frac{z_2}{z_1})$. Упрощая $z_1 = z_2, \epsilon_+ = \beta - 1, \epsilon_1 = -1$ можем записать:

${}_2F_1(1-\beta, w_2 - w_1 + 1 - \beta; w_2 - w_1 + 1|1) = \frac{\Gamma(w_2-w_1+1)}{\Gamma(w_2-w_1+\beta)} *$(константа).
Тогда рассмотрим функцию:

$$K_2 = \frac{\Gamma(w_1-w_2)\Gamma(w_2-w_1+1)}{\Gamma(w_1-w_2+\beta)\Gamma(w_2-w_1+\beta)}.$$

Собственные функции модели rRS
Собственная функция для произвольного N

Обобщим эту функцию на случай произвольного числа N переменных.

$$K_N = \prod_{i<j} \frac{\Gamma(w_i - w_j)\Gamma(w_j - w_i + 1)}{\Gamma(w_i - w_j + \beta)\Gamma(w_j - w_i + \beta)}$$

$$H^{rR} K_N = N K_N.$$